

(UG63)

Roll No.

S.C.No.—M/21/2004504

B. Sc. EXAMINATION, 2021

(Fifth Semester)

(Main)

MATHEMATICS

12BSM352

Groups and Rings

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 40

Note : Attempt Five questions in all. All questions carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

1. (a) Show that a group upto order 2 is abelian. 1½

दर्शाइए कि कोटि 2 तक का एक समूह आबेलियन होता है ।

(b) How many generators are there of the cyclic group ? 1½

चक्रीय समूह के कितने जनरेटर्स होते हैं ?

(c) State Lagrange's theorem. 1½

लैण्गेंजे की प्रमेय का वर्णन कीजिए ।

(d) Define integral domain. give example. 1½

उदाहरण सहित समाकलन क्षेत्र को परिभाषित कीजिए ।

(e) Prove that a field has no proper ideal. 1

सिद्ध कीजिए कि एक क्षेत्र में कोई उचित आदर्श नहीं है ।

(f) Define primitive polynomial with example. 1

उदाहरण सहित आदिम बहुपद को परिभाषित कीजिए ।

2. (a) Show that the set $G = \{a + \sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ is an abelian group with respect to ' $+$ '.

दर्शाइए कि सेट $G = \{a + \sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ ' $+$ '

के सापेक्ष में एक आबेलियन समूह है ।

- (b) Show that the set of integers Z is an abelian group with respect to binary operation $*$ defined by $a*b = a+b+1$ for $a, b \in Z$. 4

दर्शाइए कि समाकलन Z का बंद बाइनरी ऑपरेशन $*$ के मापेस एक आबेलियन समूह है जिसे $a, b \in Z$ के लिए $a*b = a+b+1$ द्वारा परिभाषित किया गया है।

3. (a) If H is any sub-group of G and $h \in H$, then $Hh = H = hH$. 4

यदि H और $h \in H$ का कोई उपसमूह है, तो $Hh = H = hH$

- (b) Prove that the order of each sub-group of a finite group is a divisor of the order of the group.

सिद्ध कीजिए कि एक फिनिट समूह के प्रत्येक उपसमूह को कोटि समूह की कोटि की विभाजक है।

4. (a) Every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G . 4

एक समूह G की प्रत्येक समरूप इमेज G के कुछ गुणांक समूह तक आइसोमॉर्फिक है।

- (b) Centre of a group G is normal sub-group of G . 4

एक समूह G का केन्द्र G का सामान्य उपसमूह है।

5. (a) DeCompose the following permutation into transpositions :

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ 3

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ 1

निम्नलिखित क्रमचय को प्रतिस्थापन में डिकम्पोज कीजिए :

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

(b) Prove that every group is isomorphic to a permutation group. 4

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक समूह क्रमचय समूह तक आइसोमॉर्फिक है ।

6. (a) An arbitrary intersection of a subrings is subring. 4

एक उपवलय का स्वैच्छिक प्रतिच्छेदन एक उपवलय है ।

(b) Prove that every subring of a commutative ring is commutative. 4

सिद्ध कीजिए कि एक विनिमेय वलय का प्रत्येक उपवलय विनिमेय होता है ।

7. (a) A division ring is a simple ring. 4

एक विभाजन वलय एक सरल वलय है ।

(b) State and prove Fundamental theorem of Homomorphism of rings. 4

वलयों के समरूप की मौलिक प्रमेय को सिद्ध करते हुए वर्णन कीजिए ।

8. (a) The integral domain $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ of integers is an Euclidean domain. 4

समाकलों के समाकल क्षेत्र $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ एक यूक्लिडियन क्षेत्र है ।

(b) Find all the units of $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. 4

$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ की सभी इकाइयाँ ज्ञात कीजिए ।

9. (a) If F is a field, $F[x]$ may not be a field. 4
यदि F एक क्षेत्र है तो $F[x]$ एक क्षेत्र नहीं हो सकता है ।

(b) Show that the polynomial $6x^7 + 49x^6 + 7x^2 + 14$ is irreducible over \mathbb{Q} . 4

दर्शाए कि बहुपद $6x^7 + 49x^6 + 7x^2 + 14$ पर अलघुकरणीय है ।