

(10SEP48)

Roll No. ....

S.C.No.—A/21/2004404

B. Sc. EXAMINATION, 2021

(Fourth Semester)

MATHEMATICS

12BSM242

Special Functions and Integral Transforms

Time : 2 Hours Maximum Marks : 40

Note : Attempt Four questions in all. All questions carry equal marks.

कुल चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

1. (a) Show that  $x=0$  is an ordinary point of the differential equation : 2

$$(x^2 + 1) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - xy = 0$$

(2021-1927) H-A/21/2004404(10SEP48)(TR)

P.T.O.

दर्शाइए कि  $x=0$  अवकल समीकरण

$$(x^2 + 1) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - xy = 0$$
 का सामान्य

बिन्दु है ।

(b) Find the Laplace transform of  $2 \sin 3t + 3 \cos 3t$ . 2

$2 \sin 3t + 3 \cos 3t$  का लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिए ।

(c) Define Fourier sine and cosine transform. 2

फूरिये साइन तथा कोसाइन रूपांतरण को परिभाषित कीजिए ।

(d) Define convolution theorem for Fourier transform. 2

फूरिये रूपांतरण के लिए कन्वोल्यूशन प्रमेय को परिभाषित कीजिए ।

(e) Find inverse Laplace transform of

$$\frac{1}{(s+2)^2}$$
 2

H-A/21/2004404(10SEP48)(TR) 2

$\frac{1}{(s+2)^2}$  का लाप्लास रूपांतरण व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।

2. (a) Obtain the power series solution of :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (x-3)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

in powers of  $(x-2)$ . 5

$(x-2)$  की घातों में :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (x-3)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

का घात श्रेणी हल प्राप्त कीजिए ।

(b) Show that : 5

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

where  $n$  is any integer.

दर्शाइए कि :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

जहाँ  $n$  कोई पूर्णांक है ।

3. (a) Find the solution of  $x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4}y = 0$  in terms of Bessel's function. 5

$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4}y = 0$  का बेसल फलन के पदों में हल ज्ञात कीजिए ।

(b) Show that : 5

$$J_4(x) = \left(\frac{48}{x^3} - \frac{8}{x}\right)J_1(x) + \left(1 - \frac{24}{x^2}\right)J_0(x)$$

दर्शाइए कि :-

$$J_4(x) = \left(\frac{48}{x^3} - \frac{8}{x}\right)J_1(x) + \left(1 - \frac{24}{x^2}\right)J_0(x)$$

4. (a) Express :

$$4x^3 - 2x^2 - 3x + 8$$

in terms of Legendre's polynomials. 5

लीजेंड्रे बहुपदों के पदों में  $4x^3 - 2x^2 - 3x + 8$  को व्यक्त कीजिए ।

(b) Prove that : 5

$$\frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)t^n P_n(x)$$

मिद कीजिए कि :

$$\frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)t^n P_n(x)$$

5. (a) Show that : 5

$$e^{2\alpha-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

दर्शाइए कि :

$$e^{2\alpha-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

(b) Show that : 5

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

दर्शाइए कि :

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

6. (a) Find the Laplace transform of  $\sin 2t \cos 3t$ . 5

$\sin 2t \cos 3t$  का लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिए।

(b) Evaluate :

$$L\left(\frac{1-\cos 2t}{t}\right)$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$L\left(\frac{1-\cos 2t}{t}\right)$$

7. (a) Find the inverse Laplace transform of  $\log \frac{1+s}{s}$ . 5

$\log \frac{1+s}{s}$  का प्रतिलोम लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिए।

(b) Apply convolution theorem to evaluate : 5

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right)$$

$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right)$  का मूल्यांकन करने के लिए कन्वोल्यूशन प्रमेय का प्रयोग कीजिए ।

8. (a) Find the Fourier sine transform of  $\frac{e^{-ax}}{x}$ . **5**

$\frac{e^{-ax}}{x}$  का फूरिये साइन (sine) रूपांतरण ज्ञात कीजिए ।

(b) Find  $f(x)$  if its Fourier sine transform is  $\frac{s}{1+s^2}$ . **5**

$f(x)$  ज्ञात कीजिए यदि इसका फूरिये साइन रूपांतरण  $\frac{s}{1+s^2}$  है ।

9. (a) Find the finite sine transform of  $f(x) = 2x$ , where  $0 < x < 4$ . **5**

$f(x) = 2x$  का परिमित sine रूपांतरण ज्ञात कीजिए, जहाँ  $0 < x < 4$  है ।

(b) Find Fourier transform of the function : **5**

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

फलन :

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{यदि } 0 < x < a \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

का फूरिये रूपांतरण ज्ञात कीजिए ।