

(UG135)

Roll No. ....

S.C.No.—M/21/2004303

**B. Sc. EXAMINATION, 2021**

(Third Semester)

(Main/Reappear)

MATHEMATICS

12BSM231

Advanced Calculus

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 40

Note : Attempt Five questions in all. All questions carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

1. (a) State and prove Rolle's theorem. 4  
रोले प्रमेय को सिद्ध कीजिए और वर्णन कीजिए ।

(b) Show that  $f(x) = x^2$  is uniformly continuous on  $[-1, 1]$ . 4

दर्शाइए कि  $f(x) = x^2$  समान रूप से  $[-1, 1]$  पर सतत् है ।

P.T.O.

M/21/2004303(UG135)(TR)

2. (a) Verify Lagrange's mean value theorem for  $f(x) = 2x - x^2$  in  $[0, 1]$ . 4

$[0, 1]$  में  $f(x) = 2x - x^2$  के लिए लैग्रान्जे की माध्य मूल्य प्रमेय सत्यापित कीजिए ।

(b) Evaluate :  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$ . 4

मूल्यांकन कीजिए :  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$

3. (a) Prove that  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ , if it exists is unique. 4

सिद्ध कीजिए कि  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ , यदि यह अद्वितीय है ।

(b) Show that the function : 4

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

is continuous at  $(0, 0)$ .

H-M/21/2004303(UG135)(TR) 2

दर्शाए कि फंक्शन :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(0, 0) पर सतत है ।

4. (a) Expand  $e^x \cos Ly$  at  $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$  by Taylor's theorem. 4

टेलर प्रमेय द्वारा  $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$  पर  $e^x \cos Ly$  विस्तारित कीजिए ।

- (b) If  $U$  is a homogeneous function of  $x, y, z$  of order  $n$ , prove that : 4

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} = nU.$$

यदि  $U$  आर्डर  $n$  के  $x, y, z$  के सजातीय फलन है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} = nU$$

5. (a) Show that the function given by : 4

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is differentiable at the origin.

दर्शाए कि :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

द्वारा दिया गया फलन मूल बिन्दु पर अवकलनीय है ।

- (b) Give an example of a function  $f(x, y)$  for which : 4

$$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0).$$

फलन  $f(x, y)$  का एक उदाहरण दीजिए जिसके

लिए  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$  ।

6. (a) Show that the rectangular solid of maximum volume that can be inscribed in a given sphere is a cube. 4

दर्शाए कि एक आयतन में उत्कीर्ण अधिकतम आयतन का आयताकार ठोस एक घन है ।

(b) Find the dimension of a rectangular box without a top of maximum volume whose surface area is 108 sq. cms. 4

अधिकतम आयतन के शीर्ष के बिना एक आयताकार बॉक्स का आयाम ज्ञात कीजिए जिसका सतह क्षेत्र 108 वर्ग सेमी है ।

7. (a) Find the equation of osculating plane at any point on the curve  $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ . 4

वक्र  $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$  पर किसी बिन्दु पर समतल सतह का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

(b) Find the curvature and torsion of the helix  $x = acost$ ,  $y = asint$ ,  $z = at \tan \alpha$ . 4

हेलिक्स  $x = acost$ ,  $y = asint$ ,  $z = at \tan \alpha$  की वक्रता तथा मरोड़ ज्ञात कीजिए ।

8. (a) Find the involutes of the circular helix  $x = a \cos u$ ,  $y = a \sin u$ ,  $z = a u \tan \alpha$ . 4

चक्रीय हेलिक्स  $x = a \cos u$ ,  $y = a \sin u$ ,  $z = a u \tan \alpha$  का व्युत्पन्न ज्ञात कीजिए ।

(b) Find the equations of tangent plane and normal to the surface  $z = x^2 + y^2$ , at the point  $(1, -1, 2)$ . 4

बिन्दु  $(1, -1, 2)$  पर सतह  $z = x^2 + y^2$  के लिए स्पर्शरेखा तल तथा सामान्य के समीकरण ज्ञात कीजिए ।

9. (a) State Lagrange's mean value theorem. 2  
लैग्रान्जे का माध्य मूल्य प्रमेय का वर्णन कीजिए ।

(b) Show that  $f(x) = \frac{1}{x}$  is not uniformly continuous on  $(0, 1]$ . 2

दर्शाइए कि  $(0, 1]$  पर  $f(x) = \frac{1}{x}$  समान रूप से सतत् नहीं है ।

(c) Define principal normal and binormal. 2  
प्रमुख नार्मल आर बाईनार्मल को परिभाषित कीजिए ।

(d) Examine for extreme value :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x + 12. \quad 2$$

$f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x + 12$  के लिए चरम मान ज्ञात कीजिए ।