(MR317) Roll No. ....

S.C.No.—A/21/2009201

B.Sc. (Honours) EXAMINATION, 2021

(Second Semester)

NUMBER THEORY AND TRIGONOMETRY

BHM121

Time : 2 Hours *Maximum Marks* : 60

Note : Attempt *Four* questions in all. All questions carry equal marks.

कुल चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

1. (a) If a, m, n are non-zero integers, then $(a, mn) = 1$ if and only if $(a, m) = 1$ and $(a, n) = 1$. **8**

यदि a, m, n नॉन-जीरो पूर्णांक हैं, तो $(a, mn) = 1$ यदि और केवल यदि $(a, m) = 1$ तथा $(a, n) = 1$ ।

(b) Find the remainder obtained on dividing 3^{181} by 17. **7**

17 द्वारा 3^{181} को भाग देने पर प्राप्त शेष ज्ञात कीजिए ।

2. (a) Find the general solution of $70x + 112y = 168$. **8**

$70x + 112y = 168$ का सामान्य हल ज्ञात कीजिए ।

(b) Prove that $p!$ and $(p - 1)! - 1$ are relatively prime if p is an odd prime number. **7**

सिद्ध कीजिए कि $p!$ और $(p - 1)! - 1$ सापेक्षिक रूप से अभाज्य है यदि p एक विषम अभाज्य संख्या है ।

3. (a) Show that the set of integers {1, 5, 7, 11} is a RRS (mod 12). **8**

दर्शाइए कि पूर्णांकों का समुच्चय {1, 5, 7, 11} एक RRS (mod 12) है ।

(b) Find the highest power of 6 contained in 500!. **7**

500! में सम्मिलित 6 की उच्चतम घात ज्ञात कीजिए ।

4. (a) Show that $d(n) = d(n + 1) = d(n + 2) = d(n + 3)$ for $n = 4503$. 8

$n = 4503$ के लिए दर्शाइए कि $d(n) = d(n + 1) = d(n + 2) = d(n + 3)$ ।

(b) Show that 3 is a quadratic residue of 13 but a quadratic non-residue of 7, using Euler's criterion. 7

यूलर के मापदण्ड का प्रयोग करते हुए दर्शाइए कि 13 का द्विघात अवशेष 3 है लेकिन 7 का द्विघात गैर-अवशेष है ।

5. (a) Prove that 'n', nth roots of unity form a series in G.P. and show that their product is equal to $(-1)^{n-1}$. 8

सिद्ध कीजिए कि 'n', के nवां मूल एकता G.P. श्रेणी में हैं तथा दर्शाइए कि उनके गुणनफल $(-1)^{n-1}$ के समान हैं ।

(b) Show that the roots of the equation $(x - 1)^n = x^n$ (n being a positive integer) are $\frac{1}{2}\left(1 + i\cot\frac{r\pi}{n}\right)$, where $r = 0, 1, 2, \ldots\ldots (n - 1)$. 7

https://www.cbluonline.com

दर्शाइए कि मूलों का समीकरण $(x - 1)^n = x^n$ (n एक सकारात्मक पूर्णांक) $\frac{1}{2}\left(1 + i\cot\frac{r\pi}{n}\right)$ है, जहाँ $r = 0, 1, 2, \ldots\ldots (n - 1)$ ।

6. (a) If α and β be the imaginary cube roots of unity, prove that : 8

$$\alpha.e^{\alpha x} + \beta e^{\beta x} = -e^{\frac{-x}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

यदि α और β यूनिट के काल्पनिक मूल हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\alpha.e^{\alpha x} + \beta e^{\beta x} = -e^{\frac{-x}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

(b) If $\sin(u + iv) = x + iy$, prove that : 7

$$\frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 v} = 1$$

यदि $\sin(u + iv) = x + iy$, हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 v} = 1$$

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com
https://www.cbluonline.com
https://www.cbluonline.com
https://www.cbluonline.com

7. (a) Prove that : **8**

$$\tan\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right)=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right)=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

(b) Solve the equation : **7**

$$\tan^{-1}\frac{1}{4}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{6}+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{4}$$

समीकरण हल कीजिए :

$$\tan^{-1}\frac{1}{4}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{6}+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{4}$$

8. (a) Solve the equation : **8**

$$\tan^{-1}\left(e^{ix}\right)-\tan^{-1}\left(e^{-ix}\right)=\tan^{-1}(i)$$

समीकरण हल कीजिए :

$$\tan^{-1}\left(e^{ix}\right)-\tan^{-1}\left(e^{-ix}\right)=\tan^{-1}(i)$$

(b) Find the sum of the series $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots\ldots$ to n terms and deduce the sum of the series $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n - 1)$ **7**

श्रेणी $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots\ldots$ n पदों तक का योग ज्ञात कीजिए तथा श्रेणी $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n - 1)$ का योग व्युत्पन्न कीजिए ।

9. (a) If $(a, b) = 1$ and $c|a$, then $(c, b) = 1$. **1.5**

यदि $(a, b) = 1$ तथा $c|a$ हो, तो $(c, d) = 1$ ।

(b) Find x such that : **1.5**

$$x \equiv 7 \pmod 5$$

x ज्ञात कीजिए इस प्रकार कि :

$$x \equiv 7 \pmod 5$$

(c) State Fermat's theorem. **1.5**

फर्मेट की प्रमेय का वर्णन कीजिए ।

(d) Find $\phi(n)$ for $n = 68$. **1.5**

$n = 68$ के लिए $\phi(n)$ ज्ञात कीजिए ।

(e) Simpify : **1.5**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 (\cos\theta - i\sin\theta)^3$$

सरल कीजिए :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 (\cos\theta - i\sin\theta)^3$$

(f) Find all the values of $(i)^{1/4}$. **1.5**

$(i)^{1/4}$ के सभी मान ज्ञात कीजिए ।

(g) Split $e^{(6+5i)^2}$ into real and imaginary parts. **1.5**

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों में $e^{(6+5i)^2}$ विभाजित कीजिए ।

(h) Find the principal and general values of log (–5). **1.5**

log (–5) के मुख्य और सामान्य मूल्य ज्ञात कीजिए ।

(i) Prove that : **1.5**

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com

(j) Find the value of $\exp\left(\pm\frac{i\pi}{2}\right)$ and $\exp(2n\pi i)$. **1.5**

$\exp\left(\pm\frac{i\pi}{2}\right)$ तथा $\exp(2n\pi i)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com