

(UG762)

Roll No. ....

S.C.No.—2009104

**B. Sc. (Hons.) EXAMINATION, 2021**

(First Semester)

DISCRETE MATHEMATICS-I

BHM-114

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 60

**Note :** Attempt *Four* questions in all. All questions carry equal marks.

1. (a) Using Venn diagrams, investigate whether the following statements are true or false :

(i)  $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$

(ii)  $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$

(iii)  $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

(iv)  $A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$ ,

where  $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

वेन आरेखों का प्रयोग करके बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य :

(i)  $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$

(ii)  $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$

(iii)  $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

(iv)  $A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$

जहाँ  $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

(b) Determine which, if any, of the four properties (reflexive, symmetric, anti-symmetric, transitive) is satisfied by each of the following relations on the set  $Z^+$  of positive integers :

(i)  $nRm$  if and only if  $n - m$  is multiple of 3.

(ii)  $nRm$  if and only if  $n = 3^k m$  for some  $k \in Z^+$

(iii)  $nRm$  if and only if  $n \neq m$ .

धनात्मक पूर्णांक समुच्चय  $Z^+$  पर निम्नलिखित में से प्रत्येक संबंध द्वारा चार (रिफ्लेक्सिव, सिमेट्रिक, एंटी-सिमेट्रिक, ट्रांजिटिव) गुणों में से कौनसा, यदि कोई हो, संतुष्ट होता है :

(i)  $nRm$  यदि और केवल यदि  $n - m$ , 3 का गुणक है ।

- (ii)  $nRm$  यदि और केवल यदि  $n = 3^k m$  किसी  $k \in \mathbb{Z}^+$  के लिए ।
- (iii)  $nRm$  यदि और केवल यदि  $n \neq m$

2. (a) Prove that denumerable union of denumerable set is denumerable.

सिद्ध कीजिए कि अगणनीय समुच्चय का अगणनीय संघ अगणनीय होता है ।

(b) Let  $K(n)$  denote the number of unordered pairs of integers selected from 1, 2, 3, ...,  $n$  subject to the restriction that no pair is consecutive. For example,  $K(5)$  is the count of pairs :

1,3 1,4 1,5 2,4 2,5 3,5

Make a conjecture about  $K(n)$  form this information, and , if possible, prove your conjecture by Mathematical Induction.

माना कि  $K(n)$  पूर्णाकों के अक्रमित युग्मों की संख्या को दर्शाता है, जिन्हें 1, 2, 3, ...,  $n$  से चुना गया है । इस प्रतिबंध के साथ कि कोई भी युग्म लगातार नहीं है । उदाहरणार्थ,  $K(5)$  निम्न युग्मों का काउंट है :

1,3 1,4 1,5 2,4 2,5 3,5

इस सूचना से  $K(n)$  का कंजेक्चर बनाइए, तथा, यदि संभव हो, गणितीय निगमन द्वारा अपने कंजेक्चर को सिद्ध कीजिए ।

3. (a) If  $P$ :—"It is raining",  $Q$ :—"I have the time" and  $R$ :—"I will go to movie" are propositions, write the sentences in English corresponding to the following propositional forms :

- (i)  $(\sim P \wedge Q) \Leftrightarrow R$
- (ii)  $(Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow Q)$
- (iii)  $\sim (Q \vee R)$

यदि  $P$ :—"वर्षा हो रही है",  $Q$ :—"मेरे पास समय है" तथा  $R$ :—"मैं फिल्म देखने जाऊँगा" साध्य (तर्कवाक्य) हैं, तो निम्न तार्किक रूपों के संगत अंग्रेजी में वाक्य लिखिए :

- (i)  $(\sim P \wedge Q) \Leftrightarrow R$
- (ii)  $(Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow Q)$
- (iii)  $\sim (Q \vee R)$

(b) Construct the truth table for the following :

(i)  $(P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee R) \Rightarrow (R \vee Q))$

(ii)  $(P \vee (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \vee \sim R) \Rightarrow Q)$

निम्नलिखित के लिए सत्यता सारणी बनाइए :

(i)  $(P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee R) \Rightarrow (R \vee Q))$

(ii)  $(P \vee (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \vee \sim R) \Rightarrow Q)$

4. (a) Test the validity of the following argument :

If Ram is clever then Prem is well-behaved. https://www.cbluonline.com

If Joe is good then Sam is bad and Prem is not well-behaved.

If Lal is educated then Joe is good or Ram is clever.

Hence if Lal is educated and Prem is not well-behaved, then Sam is bad.

निम्नलिखित तर्कयुक्ति की वैधता का परीक्षण कीजिए :

यदि राम चतुर है तो प्रेम व्यवहारकुशल है । यदि जोइ अच्छा है तो साम बुरा है और प्रेम व्यवहारकुशल नहीं है ।

यदि लाल शिक्षित है तो जोइ अच्छा है या साम चतुर है ।

अतः यदि लाल शिक्षित है व प्रेम व्यवहारकुशल नहीं है तो साम बुरा है ।

(b) State the converse, inverse and contra positive to the following statements :

(i) If a triangle is isosceles, then two of its sides are equal.

(ii) If there is no unemployment in India, then the Indian won't go to the USA for employment.

निम्नलिखित वाक्यों के कनवर्स, इनवर्स तथा कॉण्ट्रापॉजीटिव बताइए :

(i) यदि कोई त्रिभुज समद्विबाहु है, तो इसकी दो भुजाएँ बराबर होती हैं ।

(ii) यदि भारत में बेरोजगारी नहीं होगी, तो कोई भारतीय रोजगार के लिए अमेरिका नहीं जाएगा ।

5. (a) Let  $T_n$  be the number of all possible triangles formed by joining vertices of an  $n$ -sided regular polygon  $T_{n+1} - T_n = 10$ , then value of  $n$  is .....

माना  $T_n$  किसी  $n$ -भुजा वाले सम बहुभुज  $T_{n+1} - T_n = 10$  के शीर्षों को जोड़कर बनाए गए सभी संभव त्रिभुजों की संख्या है, तो  $n$  का मान.....होगा ।

- (b) The total number of positive integral solution for  $x, y, z$  such that  $x * y * z = 24$ , is.....

$x, y, z$  हेतु धनात्मक पूर्णाकीय हलों की कुल संख्या जिसमें  $x * y * z = 24$ , होगी.....।

- (c) If  $a$  denotes the number of permutations of  $x+2$  things taken all at a time,  $b$  the number of permutations of  $x$  things taken 11 at a time and  $c$  the number of permutations of  $x-11$  things taken all at a time such that  $a = 182bc$ , then find the value of  $x$ .

यदि  $a$  एक साथ ली गई  $x+2$  वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या है,  $b$  एक बार में 11 ली गई  $x$  वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या है तथा  $c$  एक बार में ली गई  $x-11$  वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या है इसक प्रकार कि  $a = 182bc$ , तो  $x$  का मान निकालिए ।

6. (a) Total number of ways of selecting five letters from letters of the word INDEPENDENT.

शब्द INDEPENDENT के अक्षरों से पाँच अक्षर चुने जाने के कुल तरीके ।

- (b) How many ways different 3-letter words can be formed with the letters of the word 'JAIPUR' which ends with I ?

'JAIPUR' शब्द के अक्षरों से, I से समाप्त होने वाले, 3 भिन्न अक्षर वाले कितने शब्द बनाये जा सकते हैं ?

- (c) Show that set of all non-singular  $2 \times 2$  matrix forms a non-abelian group under matrix multiplication.

दिखाइए कि सभी नॉन-सिंगुलर  $2 \times 2$  आव्यूहों का समूह आव्यूह गुणन के अंतर्गत, अनाबेली समूह बनाता है ।

7. (a) Let  $a$  be a numeric function such that  $a_r$  is equal to the remainder when the integer  $r$  is divisible by 17. Let  $b$  be a numeric function such that  $b_r$  equal to 0 if the integer  $r$  is divisible by 3, and is equal to 1 otherwise :

- (i) Let  $c_r = a_r + b_r$ . For what value of  $r$  is  $c_r = 0$  ? For what value of  $r$  is  $c_r = 1$  ?
- (ii) Let  $d_r = a_r b_r$ . For what value of  $r$  is  $d_r = 0$  ? For what value of  $r$  is  $d_r = 1$  ?

माना कि  $a$  एक न्यूमेरिक फंक्शन इस प्रकार है कि  $a_r$  शेष के बराबर है जब पूर्णांक  $r$ , 17 द्वारा विभाज्य है । माना  $b$  एक न्यूमेरिक फंक्शन इस प्रकार है कि  $b_r$  शून्य के बराबर है यदि पूर्णांक  $r$ , 3 से विभाज्य है, तथा 1 के बराबर है अन्यथा :

- (i) माना  $c_r = a_r + b_r$ .  $r$  के किस मान के लिए  $c_r = 0$  है ?  $r$  के किस मान के लिए  $c_r = 1$  है ?

- (ii) माना  $d_r = a_r b_r$ .  $r$  के किस मान के लिए  $d_r = 0$  है ?  $r$  के किस मान के लिए  $d_r = 1$  है ?

(b) Find the numeric functions whose generating functions are given below :

(i)  $\frac{3 + 2z - 6z^2}{1 - 3z}$

(ii)  $\frac{3}{(1 - 2z)^2}$

(iii)  $\frac{3z}{(1 - z)(1 + 2z)}$

वे न्यूमेरिक फलन ज्ञात कीजिए, जिनके जनक फलन नीचे दिए गए हैं :

(i)  $\frac{3 + 2z - 6z^2}{1 - 3z}$

(ii)  $\frac{3}{(1 - 2z)^2}$

(iii)  $\frac{3z}{(1 - z)(1 + 2z)}$

8. (a) Solve the recurrence relation  $p_n = a - \frac{b}{k} p_{n-1}$  for the price in economic model, where  $a, b, c$  are positive parameter and  $p_0$  is the initial price.

पुनरावृत्ति संबंध  $p_n = a - \frac{b}{k} p_{n-1}$  को आर्थिक मॉडल में मूल्य हेतु हल कीजिए जहाँ  $a, b, c$  धनात्मक प्राचल है तथा  $p_0$  प्रारंभिक मूल्य है।

- (b) Solve the recurrence relation subject to given initial conditions :

$$d_n = 6d_{n-1} - 11d_{n-2} + 6d_{n-3} \text{ for } n \geq 3 \text{ with } d_0 = 1, d_1 = 5, d_2 = 15.$$

नीचे दी गई प्रारंभिक शर्तों से पुनरावृत्ति संबंध को हल कीजिए :

$$d_0 = 1, d_1 = 5, d_2 = 15 \text{ सहित } n \geq 3 \text{ के लिए } d_n = 6d_{n-1} - 11d_{n-2} + 6d_{n-3}$$

9. (a) By using backtracking method, solve  $a_n = a_{n-1} + 5, n \geq 2$  with  $a_1 = 7$ .

बैकट्रैकिंग विधि के उपयोग से हल कीजिए :

$$a_n = a_{n-1} + 5, n \geq 2 \text{ जबकि } a_1 = 7.$$

- (b) Determine dual of the statement  $(p \vee q \vee r) \wedge s$ .

कथन  $(p \vee q \vee r) \wedge s$  का द्वैती निकालिए।

- (c) Give an example of a finite ring without unity.

बिना यूनिटी के किसी निश्चित वलय का उदाहरण दीजिए।

- (d) Find the total number of signals that can be made by five flags of a different color when any number of them may be used in any signal.

अलग रंग के पाँच झंडों द्वारा बनाने वाले सिग्नलों की कुल संख्या निकालिए जबकि उनमें से कोई किसी भी सिग्नल में प्रयुक्त किया जा सकता है।

- (e) 51 numbers are chosen from integers between 1 and 100 inclusively. Prove that 2 of the chosen integers are consecutive.

1 से 100 के बीच पूर्णाकों में से समावेशी रूप से 51 संख्याएँ चुनी जाती हैं। सिद्ध कीजिए कि चुने गए पूर्णाक में से 2 क्रमिक रूप से हैं।

- (f) Define a denumerable set with two examples.

किसी अगणनीय समुच्चय को दो उदाहरणों सहित परिभाषित कीजिए।