

(UG759)

Roll No. ....

S.C.No.—2009101

**B. Sc. (Hons.) EXAMINATION, 2021**

(First Semester)

ALGEBRA

BHM-111

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 60

**Note :** Attempt any *Four* questions. All questions carry equal marks.

किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

1. (a) Prove that  $B'AB$  is symmetric or skew symmetric according as  $A$  is symmetric or skew symmetric.

सिद्ध कीजिए कि  $B'AB$  सममिति है या विषम सममिति,  $A$  के रूप में सममिति है या विषम सममिति ।

(b) If  $A$  is any square matrix, prove that  $AA^\theta$  and  $A^\theta A$  are both Hermitian.

यदि  $A$  कोई वर्ग आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि  $AA^\theta$  तथा  $A^\theta A$  दोनों हर्मीशियन हैं ।

2. (a) Find the rank of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ a & c & d & 1 \\ 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 1 \end{bmatrix}$$

आव्यूह  $\begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ a & c & d & 1 \\ 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 1 \end{bmatrix}$  की कोटि ज्ञात

कीजिए ।

(b) Express  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  as product of

elementary matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ को प्रारम्भिक आव्यूहों के}$$

रूप में प्रदर्शित कीजिए ।

3. (a) Prove that the set of vectors  $(0, 2, -4)$ ,  $(1, -2, -1)$ ,  $(1, -4, 3)$  is linearly dependent.

सिद्ध कीजिए कि वेक्टर  $(0, 2, -4)$ ,  $(1, -2, -1)$ ,  $(1, -4, 3)$  का समुच्चय रैखिक आश्रित है ।

- (b) Verify Cayley-Hamilton theorem for the

matrix  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

आव्यूह  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  के लिए कैले-हैमिल्टन

प्रमेय सत्यापित कीजिए ।

4. (a) Prove that the inverse of a unitary matrix is unitary and its determinant is equal to unity.

सिद्ध कीजिए कि ऐकिक आव्यूह का प्रतिलोम ऐकिक है तथा इसका निर्धारक एक के बराबर है ।

- (b) For what values of  $a$  and  $b$ , the system of equations  $x + y + 5z = 0$ ,  $x + 2y + 3az = b$ ,  $x + 3y + az = 1$  have unique solution ?

$a$  और  $b$  के किस मान के लिए समीकरण  $x + y + 5z = 0$ ,  $x + 2y + 3az = b$ ,  $x + 3y + az = 1$  का निकाय एक हल रखता है ?

5. (a) Write the matrix of the bilinear form  $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_1$ . Also, find the rank.

द्विरैखिक फॉर्म  $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_1$  का आव्यूह लिखिए । कोटि भी ज्ञात कीजिए ।

(b) Write the symmetric matrix of the quadratic form  $(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2$ .

द्विघात रूप  $(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2$  का सममिति आव्यूह लिखिए ।

6. (a) Express  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$  as a polynomial of  $(x-3)$ .

$(x-3)$  के बहुपद के रूप के  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$  स्पष्ट कीजिए ।

(b) The equation :

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$$

has two pairs of equal roots, find them.

समीकरण :

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$$

समान मूलों के दो जोड़े रखते हैं, उन्हें ज्ञात कीजिए ।

7. (a) Find the common roots of the equations :

$$x^4 + 5x^3 - 22x^2 - 50x + 132 = 0$$

and  $x^4 + x^3 - 20x^2 + 16x + 24 = 0$ .

समीकरण :

$$x^4 + 5x^3 - 22x^2 - 50x + 132 = 0$$

तथा  $x^4 + x^3 - 20x^2 + 16x + 24 = 0$

के सामान्य मूल ज्ञात कीजिए ।

(b) Transform the equation :

$$3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$$

into one in which the co-efficient of  $x^3$  is unity and all co-efficients are integral.

समीकरण :

$$3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$$

का एक में रूपान्तरण कीजिए, जिसमें  $x^3$  का गुणांक एक है तथा सभी गुणांक समाकलनीय हैं ।

8. (a) Solve the following equation by Cardan's method :

$$x^3 + 72x - 1720 = 0.$$

कार्डन विधि के द्वारा निम्नलिखित समीकरण हल कीजिए :

$$x^3 + 72x - 1720 = 0.$$

(b) Solve the  $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 26x + 14 = 0$

by Descartes method.

देकार्तो विधि से :

$$x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 26x + 14 = 0$$

हल कीजिए ।

9. (a) Apply Descartes rule of signs to discuss the nature of the roots of the equation

$$x^6 - 3x^2 - x + 1 = 0.$$

समीकरण  $x^6 - 3x^2 - x + 1 = 0$  के मूलों की प्रकृति का वर्णन करने के लिए संकेतों का देकार्तो का नियम प्रयोग कीजिए ।

- (b) Show that the equation :

$$2x^7 + 3x^4 + 3x + k = 0$$

has at least 4 imaginary roots for all values of  $k$  (constant).

दर्शाइए कि समीकरण  $2x^7 + 3x^4 + 3x + k = 0$   $k$  (निर्देशांक) के सभी मानों के लिए कम से कम 4 काल्पनिक मूल होते हैं ।