

S.C.No.—2101221

B. A./B. Sc. EXAMINATION, 2022

(Second Semester)

(Main)

MATHEMATICS

20UMTH202

Vector Calculus and Geometry

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 40

Note : Attempt Five questions in all. All questions carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

1. (a) Find the angle of intersection between the surfaces $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ and $x^2 + y^2 - z^2 = 3$ at point $(2, -1, 2)$. 4

बिंदु $(2, -1, 2)$ पर सतहों $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ और $x^2 + y^2 - z^2 = 3$ के बीच प्रतिच्छेदन कोण ज्ञात कीजिए ।

- (b) If $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ and $r = |\vec{r}|$; prove that : 4

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0.$$

यदि $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ और $r = |\vec{r}|$; सिद्ध कीजिए कि :

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0.$$

2. (a) If $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ and $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ find $\operatorname{curl}\left\{(\vec{a} \times \vec{r})r^n\right\}$, where $r = |\vec{r}|$. 4

यदि $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ और $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ कर्ल (टॉल) $\left\{(\vec{a} \times \vec{r})r^n\right\}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $r = |\vec{r}|$ ।

(b) Show that :

$$\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$$

where $\vec{r} = xi + yj + zk$ and $r = |\vec{r}|$. 4

दर्शाइए कि:

$$\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$$

जहाँ $\vec{r} = xi + yj + zk$ और $r = |\vec{r}|$ ।

3. (a) Show that the cylindrical and spherical co-ordinate system are self-reciprocal. 4

दर्शाइए कि बेलनाकार और गोलाकार निर्देशांक प्रणाली स्व-व्युत्क्रम हैं ।

(b) Express the vector $\vec{B} = zi - 2xj + yk$ in cylindrical co-ordinates. Hence find B_ρ , B_ϕ and B_z . 4

वेक्टर $\vec{B} = zi - 2xj + yk$ को बेलनाकार निर्देशांक में व्यक्त कीजिए । अतः B_ρ , B_ϕ और B_z ज्ञात कीजिए ।

4. (a) Express the velocity \vec{v} and acceleration \vec{f} of a particle in cylindrical co-ordinates. 4

बेलनाकार निर्देशांक में एक कण के वेग \vec{v} और त्वरण \vec{f} को व्यक्त कीजिए ।

(b) Prove that :

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_\theta) = -\frac{d\theta}{dt}(\hat{e}_r) + \cos\theta \frac{d\phi}{dt}(\hat{e}_\phi)$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_\theta) = -\frac{d\theta}{dt}(\hat{e}_r) + \cos\theta \frac{d\phi}{dt}(\hat{e}_\phi)$$

5. (a) Evaluate $\int_C \phi d\vec{r}$ for $\phi = x^3y + 2y$ from (1, 1, 0) to (2, 4, 0) along the line joining these two points. 4

इन दो बिंदुओं (1, 1, 0) से (2, 4, 0) को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश $\int_C \phi d\vec{r}$ के लिए $\phi = x^3y + 2y$ का मूल्यांकन कीजिए ।

(b) Evaluate $\iint_S \vec{f} \cdot \hat{n} dS$, where

$\vec{f} = yzi + xzj + xyk$ and S is part of the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ which lies in the first octant. 4

$\iint_S f \cdot \hat{n} \, dS$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $\vec{f} = yz\hat{i} + zx\hat{j} + xy\hat{k}$ और S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ की सतह का हिस्सा है जो पहले अष्टक में स्थित है।

6. (a) Verify divergence theorem for $\vec{f} = x^2\hat{i} + z\hat{j} + yz\hat{k}$ taken over the cube bounded by $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$. 4

$x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ से परिबद्ध घन पर $\vec{f} = x^2\hat{i} + z\hat{j} + yz\hat{k}$ के लिए विचलन प्रमेय सत्यापित कीजिए।

- (b) Using Stoke's theorem, evaluate $\oint_C [(x+y)dx + (2x-z)dy + (y+z)dz]$, where C is the boundary of the triangle with vertices at $(2, 0, 0), (0, 3, 0)$ and $(0, 0, 6)$. 4

स्टोक की प्रमेय का उपयोग करके, $\oint_C [(x+y)dx + (2x-z)dy + (y+z)dz]$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ C त्रिभुज की सीमा $(2, 0, 0), (0, 3, 0)$ और $(0, 0, 6)$ पर शीर्ष है।

7. (a) Find the centre, lengths and the equations of the axes, and foci of the conic : 4

$$5x^2 - 24xy - 5y^2 + 14x + 8y - 16 = 0$$

शंकु $5x^2 - 24xy - 5y^2 + 14x + 8y - 16 = 0$ का केंद्र, लम्बाई और अक्षों के समीकरण और फोकसी ज्ञात कीजिए।

- (b) Define director circle. Find the equation of director circle of the conic : 4

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

निदेशक वृत्त को परिभाषित कीजिए।

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

शांकव के निदेशक वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

8. Trace the conic : 8

$$x^2 + xy + y^2 + x - 4y + 1 = 0$$

शांकव को ज्ञात कीजिए :

$$x^2 + xy + y^2 + x - 4y + 1 = 0$$

9. (i) Show that the vector : 1½

$$\vec{f} = (\sin y + z)\hat{i} + (x \cos y - z)\hat{j} + (x - y)\hat{k}$$

is irrotational.

दर्शाए कि सदिश :

$$\vec{f} = (\sin y + z)\hat{i} + (x \cos y - z)\hat{j} + (x - y)\hat{k}$$

अघूर्णी है ।

(ii) Show that $\iint_S \hat{n} dS = 0$ for any closed surface S. <https://www.cbluonline.com> 1½

किसी भी बंद सतह S के लिए दर्शाए कि

$$\iint_S \hat{n} dS = 0$$

(iii) Find unit normal vector to $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ at the point $(1, -1, 2)$. 1

बिंदु $(1, -1, 2)$ पर $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ के लिए इकाई सामान्य वेक्टर (सदिश) ज्ञात कीजिए ।

(iv) For what value of λ conic $x^2 + 2xy + (1 + \lambda)y^2 + 2\lambda y - 1 = 0$ will represent pair of parallel lines. 2

λ के किस मान के लिए शंकु $x^2 + 2xy + (1 + \lambda)y^2 + 2\lambda y - 1 = 0$ का मान किस समांतर रेखाओं के युग्म को निरूपित करेगा ?

(v) Prove that :

$$\frac{d}{dt} e_r = \frac{d\theta}{dt} e_\theta$$

where (r, θ, z) are cylindrical coordinates. 2

सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{d}{dt} e_r = \frac{d\theta}{dt} e_\theta$$

जहाँ (r, θ, z) बेलनाकार निर्देशांक हैं ।

<https://www.cbluonline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से